# 8 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

## 8.1 Квадратурные формулы

Рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов

$$I = \int_b^a f(x)dx \tag{52}$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) \tag{53}$$

где ck – числовые коэффициенты и xk – точки отрезка [a,b], k=0,1,…,N.

Приближенное равенство $\int_b^a f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$ называется квадратурной формулой, а сумма вида (2) – квадратурной суммой. Точки xk называются узлами квадратурной формулы, а числа ck - коэффициентами квадратурной формулы. Разность $\psi_n = \int_b^a f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$ называется погрешностью квадратурной формулы. Погрешность зависит как от расположения узлов, так и от выбора коэффициентов.

Введем на [a, b] равномерную сетку с шагом h, т.е. множество точек $\omega_{\text{h}} = \{x_{\text{i}} = a + ih,\ \ i = 0,1,...,N; hn = b - a\}$ и представим интеграл (52) в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

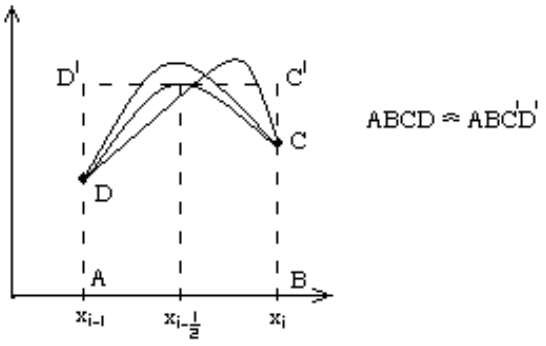
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \tag{54}$$

Для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке [a, b] достаточно построить квадратурную формулу для интеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \tag{55}$$

на частичном отрезке [xi-1, xi] и воспользоваться свойством (53).

## 8.2 Формула прямоугольников




$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(x_{i-\frac{1}{2}})h \tag{56}$$

(56) – формула прямоугольников на частичном отрезке [xi-1, xi].

Погрешность формулы (56) определяется величиной: $\psi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_{i-\frac{1}{2}})h$.

Оказывается

$$|\psi_i| \le \frac{h^3}{24} M_{2,i}, \tag{57}$$

где $M_{2,i} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$

Суммируя равенство (56) по i от 1 до N получим составную формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}})h. \tag{58}$$

Погрешность этой формулы

$$\psi = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})h \quad , \tag{59}$$

равна сумме погрешностей по всем частичным отрезкам.
Оказывается:

$$|\psi| \le \frac{h^2(b-a)}{24} M_2 \text{, где } M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \tag{60}$$

Т.е. погрешность формулы прямоугольников на всем отрезке есть величина 0(h2), это означает, что квадратурная формула (58) имеет второй порядок точности.

## 8.3 Формула трапеций

На частичном отрезке площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямолинейной трапеции:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h \tag{61}$$

После суммирования составная формула трапеций принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} h = h(0{,}5 f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1} + 0{,}5 f_N) \tag{62}$$

где $f_i = f(x_i); \quad i = 0,1,\ldots,N; \quad hN = b - a$.
Погрешность этой формулы оценивается следующим образом:
$|\psi| \le \frac{h^2(b-a)}{12} M_2, \quad M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$
Таким образом, формула трапеций имеет, так же как и формула прямоугольников, второй порядок точности $\psi = 0(h^2)$, но её погрешность оценивается величиной в два раза большей.

## 8.4 Формула Симпсона

При аппроксимации интеграла (55) заменим функцию f(x) параболой, проходящей через точки $(x_j, f(x_j)),\ j = i-1, i-0{,}5, i$, т.е представим приближенно f(x) в виде $f(x) \approx L_{2,i}(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$ где $L_{2,i}(x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени,

$$L_{2,i}(x) = \frac{2}{h^2}((x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_i) f_{i-1} - 2(x - x_{i-1})(x - x_i) f_{i-\frac{1}{2}} + (x - x_i)(x - x_{i-\frac{1}{2}}) f_i)$$

Проводя интегрирование, получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x)dx = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i), \quad h = x_i - x_{i-1}$$

.

Таким образом, приходим к равенству

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i) \quad , \qquad (63)$$

которое называется формулой Симпсона или формулой парабол.

На всем отрезке [a,b] формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i-1}^{N} \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i) =$$

$$= \frac{h}{6}[f_0 + f_N + 2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-1}) + 4(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \ldots + f_{N-\frac{1}{2}})] \qquad (64)$$

Чтобы не использовать дробных индексов, можно обозначить $x_i = a + 0{,}5hi, \quad f_i = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,2N, \quad hN = b - a$ и записать формулу Симпсона в виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N}[f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1})] \quad . \qquad (65)$$

Погрешность составной формулы Симпсона (65) оценивается так: $|\psi| \le \frac{h^4(b-a)}{2880} M_4, \quad hN = b - a, \quad M_4 = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(IV)}(x)|$ |f(|V)(x)|.

Отсюда видно, что формула Симпсона существенно точнее, чем формулы прямоугольников и трапеций. На частичном отрезке она имеет точность 0(h5), а на всем отрезке – 0(h4)

Пример.

$$\int_0^{10} x^2 dx$$

Вычислить интеграл , сетка x0=0, x1=2, x0=4,…, x5=10, h=2

По формуле прямоугольников:

$$\int_0^{10} x^2 dx = \sum_{i=1}^{M} f(x_{i-\frac{1}{2}})h = 2(f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)) = z\cdot(1+9+25+49+81) = 2\cdot 165 = 33$$

$$\int_0^{10} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{10} = \frac{1000}{3} \approx 333{,}33$$

С др. стороны - точное значение.

$$\frac{h^2\cdot(b-a)}{24}\cdot 2 = \frac{4\cdot 10}{24} = \frac{5\cdot 2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$$

По формуле трапеций:

$$\int_0^{10} x^2 dx = 2\cdot(0{,}5\cdot f(0)+f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)\cdot 0{,}5) = 2\cdot(0+4+16+36+64+50) =$$

$$= 2\cdot 170 = 340$$

$$\frac{\psi^2(b-a)}{12}\cdot M_2 = \frac{4\cdot 10}{12}\cdot 2 = \frac{20}{3} \approx 6{,}666$$

По формуле Симпсона:

$$\int_0^{10} x^2 dx = \frac{h}{6}[f_0+f_n+2(f_1+\ldots+f_{n-1})+4(f_{\frac{1}{2}}+f_{\frac{3}{2}}+\ldots+f_{n-\frac{1}{2}})] = \frac{2}{6}[0+100+2(4+16+36+64)+$$

$$+4(1+9+25+49+81)] = \frac{1}{3}[100+2\cdot 120+4\cdot 165] = \frac{100+240+660}{3} = \frac{1000}{3} \approx 333{,}33$$